POLINÔMIOS

Uma expressão formada por adições e subtrações de vários monômios é denominada de polinômios. (Poli = muitos).
3xy é monômio, mas também considerado polinômio, assim podemos dividir os polinômios em monômios (apenas um monômio), binômio (dois monômios) e trinômio (três monômios).

3x + 5 é um polinômio e uma expressão algébrica.

Como os monômios, os polinômios também possuem grau e é assim que eles são separados. Para identificar o seu grau, basta observar o grau do maior monômio, esse será o grau do polinômio.

Com os polinômios podemos efetuar todas as operações: adição, subtração, divisão, multiplicação, potenciação.

Operação de soma
Dados os polinômios $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x^2 - 5x$, determine $f(x) + g(x)$
Resolução:
$f(x) = 3x - 1 + g(x) = 2x^2 - 5x$
$(3x - 1) + (2x^2 - 5x) = -2x + 2x^2 - 1$

VALOR NUMÉRICO DOS POLINÔMIOS

O valor numérico de um determinado polinômio P(x) para o valor de x = a, é o número que temos quando é substituído o valor de "x" pelo valor de "a" e efetuamos os devidos cálculos indicados na sentença P(x).

Exemplos:
a) Calcule o valor numérico da expressão
$P(x) = x + 3x + 2$
Para x = 4
$P(4) = 4 + 3.4 + 2 = 18$
b) Calcule o valor numérico

$P(x) = 2x + 3x^2 + 5$
Para x = 2
$P(2) = 2.2 + 3.(2)^2 + 5$
$P(2) = 4 + 3.4 + 5 = 21$

SOMA
a) Dados os polinômios $f(x) = 3x - 1$, $g(x) = 2x^2 - 5x$, determine $f(x) + g(x)$
Resolução:
$f(x) = 3x - 1 + g(x) = 2x^2 - 5x$
$(3x - 1) + (2x^2 - 5x) = -2x + 2x^2 - 1$

SUBTRAÇÃO
$(-2x^2 + 5x - 2) - (-3x^3 + 2x - 1)$ eliminar os parênteses, invertendo os sinais do segundo termo

$$(-2x^2 + 5x - 2) - (-3x^3 + 2x - 1)$$

$-2x^2 + 5x - 2 + 3x^3 - 2x + 1 =$
$-2x^2 + 5x - 2x - 2 + 1 + 3x^3$

$-2x^2 + 3x - 1 + 3x^3$
Logo, $\mathbf{3x^3 - 2x^2 + 3x - 1}$.

MULTIPLICAÇÃO
Para efetuarmos a multiplicação de polinômio por polinômio, devemos utilizar a propriedade distributiva. Veja o exemplo:

$(x - 1) . (x^2 + 2x - 6)$
↓ ↓
POLINÔMIO POLINÔMIO
(1° FATOR) (2° FATOR)

O 1° fator tem que multiplicar todos os termos do 2° fator.

$(x - 1) . x^2 + (x - 1) . 2x - (x - 1) . 6$ -------- agora temos multiplicações de monômio
por polinômio, para resolver cada uma delas utilizamos a propriedade
distributiva.

$$\underbrace{(x-1).x^2}_{(x^3 - x^2)} + \underbrace{(x-1).2x}_{(2x^2 - 2x)} - \underbrace{(x-1).6}_{(6x - 6)}$$

------------ retirar dos parênteses os polinômios, unir os termos semelhantes.

$x^3 - x^2 + 2x^2 - 2x - 6x + 6 =$

$x^3 + x^2 - 8x + 6$

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Divisão de polinômios: em toda divisão temos o **dividendo, divisor, quociente e resto**, como estamos falando de divisão de polinômio por polinômio, teremos:

Para o **dividendo** um polinômio **G(x)**
Para o **divisor** um polinômio **D(x)**
Para o **quociente** um polinômio **Q(x)**
Para o **resto** (podendo ser zero) um polinômio **R(x)**

$$\begin{array}{l|l} G(x) & D(x) \\ \cline{2-2} R(x) & Q(x) \end{array}$$

Prova real: $G(x) = Q(x)\ D(x) + R(x)$

Tem algumas observações a serem feitas, como:

► ao final da divisão o resto sempre tem que ser menor que o divisor: **R(x) < D(x)**.

► quando o resto for igual a zero, a divisão é considerada exata, ou seja, o dividendo é divisível pelo divisor. **R(x) = 0**.
Exemplo:
Primeiro deve-se escolher o primeiro termo do quociente, que deve ser multiplicado pelos termos do divisor.

$$\begin{array}{l|l} x^3 + 3x^2 - 4x + 1 & x^2 - x + 1 \\ \cline{2-2} & x \end{array}$$

Segundo passo é passar o inverso do resultado para subtrair do polinômio.

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-4x+1 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2-x & x \\ \cline{1-1} 4x^2-5x+1 & \end{array}$$

Agora deve-se repetir o primeiro passo, escolher o termo conveniente para multiplicar pelo primeiro termo do divisor para que fique igual ao primeiro termo do polinômio que foi resultado do primeira operação.

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-4x+1 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2-x & x+4 \\ \cline{1-1} 4x^2-5x+1 & \end{array}$$

Repetir o mesmo processo do segundo passo.

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-4x+1 & x^2-x+1 \\ \cline{2-2} -x^3+x^2-x & x+4 \\ \cline{1-1} 4x^2-5x+1 & \\ -4x^2+4x+4 & \\ \cline{1-1} -x+5 & \end{array}$$

Assim temos que q(x) = x + 4 e que r(x) = - x + 5.

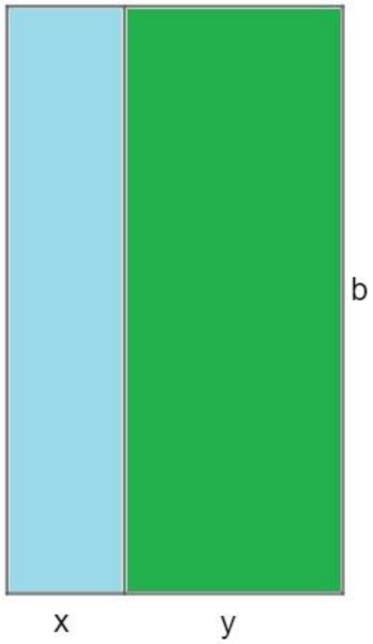
TEOREMA DO RESTO:
O resto da divisão de um polinômio *p(x)* por *(x-a)* é *p(a)* .

FATORACÃO

FATORAÇÃO
A fatoração de expressão algébrica consiste em escrever uma expressão algébrica em forma de produto. Em casos práticos, isto é, na solução de alguns problemas que envolvem expressões algébricas, a fatoração é extremamente útil, pois, na maioria das situações, ela simplifica a expressão trabalhada."

<u>Métodos para fatorar expressões algébricas</u>
Agora veremos os principais métodos de fatoração, nos mais utilizados faremos uma breve justificativa geométrica. Veja:

FATORAÇÃO POR EVIDÊNCIA
Considere o retângulo:



Observe que a área do retângulo azul mais a área do retângulo verde resultam no retângulo maior. Vamos analisar cada uma dessas áreas:

AAZUL = b · x

AVERDE = b · y

AMAIOR = b · (x + y)

Assim, temos que:

AMAIOR = AAZUL + AVERDE

b (x + y) = bx + by

Exemplos
a) Para fatorar a expressão: 12x + 24y.

Nota-se que 12 é o fator em evidência, uma vez que ele aparece em ambas as parcelas, assim, para determinar os números que vão no interior dos parênteses, basta dividir cada parcela pelo fator em evidência.

12x : 12 = x

24y : 12 = 2y

12x + 24y = 12 · (x + 2y)

b) Para fatorar a expressão $21ab^2 - 70a^2b$.

Do mesmo modo, inicialmente, determina-se o fator em evidência, isto é, o fator que se repete nas parcelas. Veja que da parte numérica temos o 7 como fator comum, uma vez que ele é o único que divide ambos os números. Agora, em relação à parte literal, veja que se repete somente o fator ab, logo, o fator em evidência é: 7ab.

$21ab^2 - 70a^2b = 7ab\ (3b - 10a)$

DIFERENÇA ENTRE DOIS QUADRADOS

Considere dois números a e b, quando temos a diferença do quadrado desses números, isto é, a2 – b2, então podemos escrevê-los como sendo o produto da soma pela diferença, ou seja:

$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$

Exemplos

a) Para fatorar a expressão $x^2 - y^2$.

Podemos utilizar a diferença entre dois quadrados, logo:

$x^2 - y^2 = (x + y) \cdot (x - y)$

b) Para fatorar $2.020^2 - 2.019^2$.

Podemos utilizar a diferença entre dois quadrados, logo:

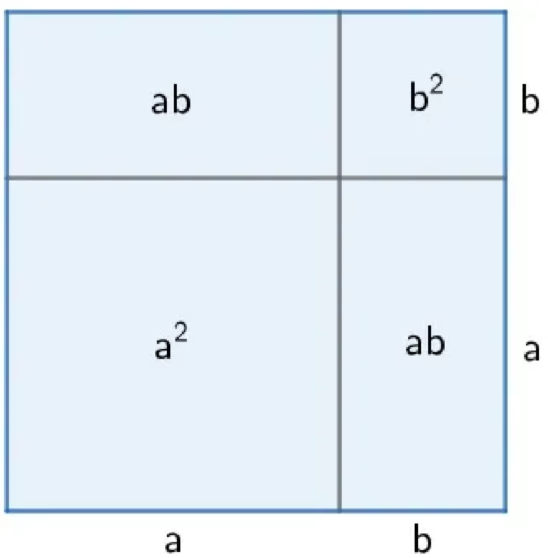
$2.020^2 - 2.019^2 = (2.020 + 2.019) \cdot (2.020 - 2.019)$

$2.020^2 - 2.019^2 = 4.039 \cdot 1$

$2.020^2 - 2.019^2 = 4.039$

TRINÔMIO DO QUADRADO PERFEITO

Considere o quadrado seguinte de lado (a + b) e observe as áreas dos quadrados e retângulos formados em seu interior.



Veja que a área do quadrado maior é dada por (a + b)2, mas, por outro lado, a área do quadrado maior pode ser obtida pela soma dos quadrados e retângulos do seu interior, assim:

$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

De maneira análoga, temos que:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Exemplo

Considere a expressão $x^2 + 12x + 36$.

Para fatorar uma expressão desse tipo, basta identificar o coeficiente da variável x e o coeficiente independente, e comparar com a fórmula dada, veja:

$x^2 + 12x + 36$

$a^2 + 2ab + b^2$

Fazendo as comparações, veja que x = a, 2b = 12 e $b^2 = 36$; das igualdades, temos que b = 6, assim a expressão fatorada é:

$x^2 + 12x + 36 = (x + 6)^2$

TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

Considere o trinômio $ax^2 + bx + c$. A sua forma fatorada pode ser encontrada utilizando suas raízes, ou seja, os valores de x que zeram tal expressão. Para determinar os valores que zeram tal expressão, basta resolver a equação $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando o método que achar conveniente. Aqui ressaltamos o método mais conhecido: método de Bhaskara.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}, onde\ \Delta = b^2 - 4ac$$

A forma fatorada do trinômio $ax^2 + bx + c$ é:

$ax^2 + bx + c = a \cdot (x - x1) \cdot (x - x2)$

Exemplo

Considere a expressão $x^2 + x - 20$.

O primeiro passo é determinar as raízes da equação $x^2 + x - 20 = 0$.

$$\Delta = 1 - 4(1)(-20)$$

$$\Delta = 1 + 80 = 81$$

$$x = \frac{-1 \pm 9}{2}$$

$$x_1 = 4$$
$$x_2 = -5$$

Assim a forma fatorada da expressão $x^2 + x - 20$ é:

$(x - 4) \cdot (x + 5)$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1) Sendo o número $n = 684^2 - 683^2$, a soma dos algarismos de n é:

a) 14

b) 15

c) 16

d) 17

e) 18

RESOLUÇÃO

Alternativa d. Para determinar a soma dos algarismos de n, inicialmente fatorarmos a expressão, uma vez que calcular os quadrados e, em seguida, realizar a subtração geram trabalho desnecessário. Fatorando a expressão utilizando a diferença entre dois quadrados, temos:

$n = 684^2 - 683^2$

$n = (684 + 683) \cdot (684 - 683)$

$n = 1.367 \cdot 1$

$n = 1.367$

Portanto, a soma dos algarismos de n é dada por $1 + 3 + 6 + 7 = 17$

2) Determine o valor da expressão:

$$\frac{2009^2 - 4}{2009 + 2}$$

Resolução

Com a intenção de facilitar a notação, vamos nomear a = 2.009 e b = 2. Lembre-se de que 22 = 4, assim temos que:

$$\frac{2009^2 - 4}{2009 + 2}$$

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

Veja que, no numerador da fração, temos a diferença entre dois quadrados, logo, podemos escrever $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. Logo:

$$\frac{(a + b)(a - b)}{a + b} = a - b$$

$a - b = 2009 - 2 = 2007$.