RACIONALIZAÇÃO DE DENOMINADORES

Racionalização de denominadores é a técnica utilizada quando uma fração tem um número irracional no denominador e se deseja encontrar uma segunda fração equivalente à primeira fração, mas que não tenha um número irracional em seu denominador. Para fazer isso, é necessário realizar operações matemáticas para reescrever a fração de forma que ela não tenha em seu denominador uma raiz não exata.

1° CASO

Racionalização quando há uma raiz quadrada no denominador

Existem algumas frações que podem ser representadas com números irracionais nos denominadores. Veja alguns exemplos:

$a)\ \frac{1}{\sqrt{3}}$

$b)\ \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$

$c)\ \frac{4}{\sqrt{2}-3}$

Quando o denominador da fração é irracional, utilizamos algumas técnicas para transformá-lo em um denominador racional, como a racionalização. Quando há uma raiz quadrada no denominador, podemos dividir em dois casos. O primeiro deles é quando a fração possui apenas uma raiz em seu radical.

Exemplo 1:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Para racionalizar esse denominador, vamos encontrar a fração equivalente a essa, mas que não tenha um denominador irracional. Para isso, vamos multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número — nesse caso, será exatamente o denominador da fração, ou seja, $\sqrt{3}$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Na multiplicação de frações, multiplicamos reto. Sabemos que $1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$. Já no denominador, temos que $\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{9} = 3$. Com isso, chegamos ao seguinte:

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Logo, temos uma representação da fração cujo denominador não é um número irracional.

Exemplo 2:

O segundo caso é quando existe uma adição ou uma diferença entre uma raiz não exata.

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1}$$

Quando há no denominador uma diferença ou uma adição de termos, sendo um deles a raiz não exata, multiplicamos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Chamamos de conjugado de $\sqrt{2} - 1$ o inverso do segundo número, isto é, $\sqrt{2} + 1$.

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$$

Realizando a multiplicação no numerador, temos que:

$3(\sqrt{2} + 1) = 3\sqrt{2} + 3$

Já o denominador é o produto notável conhecido como produto da soma pela diferença. O seu resultado sempre é o quadrado do primeiro termo menos o quadrado do segundo termo.

$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{2^2} - 1^2$

$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = \sqrt{4} - 1^2$

$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 2 - 1$

$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$

Então, racionalizando o denominador dessa fração, temos que:

$$\frac{3}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \frac{3\sqrt{2}+3}{1} = 3\sqrt{2}+3$$

RACIONALIZAÇÃO QUANDO HÁ UMA RAIZ DE ÍNDICE MAIOR QUE 2

Agora veja alguns exemplos quando há no denominador uma raiz de índices maiores que 2.

$a)\ \frac{4}{\sqrt[3]{2}}$

$b)\ \frac{2\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3^2}}$

Como o objetivo é eliminar o radical, vamos multiplicar o denominador, de forma que a raiz desse denominador possa ser cancelada.

Exemplo 1:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$$

Nesse caso, para eliminar o expoente do radical, vamos multiplicar pela raiz cúbica de 2^2 no numerador e no denominador, para que apareça dentro do radical 2^3 e, assim, seja possível cancelar a raiz cúbica.

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$$

Realizando a multiplicação, temos que:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4}{\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4\sqrt[3]{2^2}}{2}$$

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = 2\sqrt[3]{4}$$

Exemplo 2:

$$\frac{2\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3^2}}$$

Utilizando o mesmo raciocínio, vamos multiplicar o denominador e o numerador por um número que faça com que a potência do denominador chegue até o índice, ou seja, vamos multiplicar por raiz quinta de 3 ao cubo para que seja possível cancelar o denominador.

$$\frac{2\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3^2}} \cdot \frac{\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^3}}$$

$$\frac{2\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2\sqrt[5]{2 \cdot 3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}$$

$$\frac{2\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2\sqrt[5]{2 \cdot 27}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{2\sqrt[5]{54}}{3}$$

EXERCÍCIOS COM GABARITO COMENTADO

1) Aproximando os valores de $\sqrt{5}$ e $\sqrt{3}$ até a segunda casa decimal, obtemos 2,23 e 1,73, respectivamente. Aproximando o valor de $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ até a segunda casa decimal, obtemos

a) 1,98.
b) 0,96.
c) 3,96.
d) 0,48.
e) 0,25.

GABARITO COMENTADO

1) Resposta correta: 0,25 LETRA E

Devemos racionalizar o denominador.

$$\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5})^2+\sqrt{5}\sqrt{3} - \sqrt{5\sqrt{3}} - (\sqrt{3})^2} =$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{5-3} =$$

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2} =$$

Substituindo os valores e fazendo o cálculo:

$$\frac{2{,}23-1{,}73}{2} =$$

$$\frac{0{,}5}{2} = 0{,}25$$

2) Racionalizando o denominador da fração a seguir, encontramos:

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}}$$

a) $1 + \sqrt{3}$.
b) $2(1 + \sqrt{3})$.
c) $-2(1+ \sqrt{3})$.
d) $\sqrt{3}$.
e) $\sqrt{3} - 1$.

RESOLUÇÃO

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}} = \frac{4}{1-\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}} = \frac{4+4\sqrt{3}}{1^2-\sqrt{3}^2}$$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}} = \frac{4+4\sqrt{3}}{1-3}$$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}} = \frac{4+4\sqrt{3}}{-2}$$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}} = -2-2\sqrt{3}$$

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}} = -2(1+\sqrt{3})$$

Alternativa C.